PRÁCTICA Nº 9

Matrices elementales.
Forma normal de Hermite

Vamos a definir las matrices elementales en Mathematica. Recordemos que una matriz elemental es la matriz que se obtiene al realizar una y solo una transformación elemental por filas sobre la matriz identidad. Como sabemos hay tres tipos, cada uno de ellos correspondientes a una de las transformaciones elementales.

Tipo I: Se obtiene intercambiando en la matriz identidad de orden *n*, las filas *i* y *j*, en Mathematica tal transformación la denotaremos por el1[i, j, n]:

In[]: = **el1[i_,j_,n_] :=Module[{B},**
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, i]] = 0;
B[[j, j]] = 0;
B[[i, j]] = 1;
B[[j, i]] = B[[i, j]];
B]

In[]: = **el1[3, 4, 5]//MatrixForm**

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo II: Se obtiene multiplicando la fila *i* de la matriz identidad de orden *n* por *k* y en Mathematica la vamos a denotar mediante el2[i, k, n]:

In[]: = **el2[i_, k_, n_] :=Module[{B},**
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, i]] = k;
B]

In[]: = **el2[2, -4, 3]//MatrixForm**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo III: Se obtiene sumando a la fila *i* de la matriz identidad de orden *n*, la fila *j* previamente multiplicada por *k*, en Mathematica la vamos a denotar por el3[i, j, k, n]:

In[]: =
```
el3[i_, j_, k_, n_] :=Module[{B},
B =IdentityMatrix[n];
B[[i, j]] = k;
B]
```

In[]: =
```
el3[3, 1, 5, 4]//MatrixForm
```

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En lo sucesivo siempre que queramos trabajar con matrices elementales en el Mathematica hemos de ejecutar previamente la definición de las matrices elementales, pues Mathematica no las tiene predeterminadas.

Por último, vamos a comprobar como dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ y dada *E* (resp. *F*) matriz elemental de orden *m* (resp. *n*), entonces *EA* (resp. *AF*) es la matriz que se obtiene de *A* aplicando a sus filas (resp. columnas) la misma transformación elemental con la que se obtiene *E* (resp. *F*) a partir de la identidad:

In[]: =
```
A={{1,2,3,4},{2,3,4,5},{3,4,5,6}};
b=el1[2,3,3].A;
MatrixForm[b]
c=A.Transpose[el2[2,3,4]];
MatrixForm[c]
```

$$Out[]= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1. FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS.

En este apartado nos proponemos calcular la forma de Hermite por filas de una matriz, por ejemplo:

In[]: =
```
a={{3,6,-5,0},{1,1,2,9},{2,4,-3,1}};
```

MatrixForm[a]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacerlo de una forma directa, Mathematica incorpora el siguiente comando:

RowReduce[matriz]

que nos devuelve la forma normal de Hermite por filas de matriz:

In[]: = **RowReduce[a]\\MatrixForm**

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, si queremos calcularla paso a paso, utilizando transformaciones elementales, en primer lugar tendremos que ejecutar el fichero donde tengamos la definición de las matrices elementales.

Una vez que hemos introducido la matriz en el Mathematica:

In[]: = **a={{3,6,-5,0},{1,1,2,9},{2,4,-3,1}};**
MatrixForm[a]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Iremos realizando transformaciones elementales hasta conseguir la forma normal de Hemite, para lo cual multiplicaremos *A*, a izquierda, por las correspondientes matrices elementales. En primer lugar, intercambiamos la fila 1 y la fila 2, para obtener el pivote 1:

In[]: = **a1=el1[1, 2, 3].a;**
MatrixForm[a1]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación, haremos ceros por debajo del pivote:

In[]: = **a2=el3[2, 1, -3, 3].a1;**
MatrixForm[a2]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

In[]: = **a3=el3[3, 1, -2, 3].a2;**
MatrixForm[a3]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix}$$

Repetiremos el proceso con las *m* – 1 filas restantes y las *n* – 1 columnas restantes. Primero el segundo pivote 1:

In[]: = **a4=el2[2, 1/3, 3].a3;**
MatrixForm[a4]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix}$$

Ceros por debajo de él:

In[]: = **a5=el3[3, 2, -2, 3].a4;**
MatrixForm[a5]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Haremos el tercer pivote 1, consiguiendo una matriz escalonada:

In[]: = **a6=el2[3, 3, 3].a5;**
MatrixForm[a6]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo, ahora, será hacerla reducida. Para ello haremos ceros por encima de cada pivote. En primer lugar, podemos utilizar el tercer pivote:

In[]: = **a7=el3[2, 3, 11/3, 3].a6;**

MatrixForm[a7]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

In[]: = **a8=el3[1, 3, -2, 3].a7;**
MatrixForm[a8]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos el segundo pivote y obtendremos ya la forma normal de Hermite por filas de a:

In[]: = **a9=el3[1, 2, -1, 3].a8;**
Print[“La forma normal de Hermite de a es: ”,
MatrixForm[a9]]

Out[] = `La forma normal de Hermite de a es:` $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Observemos que H= E_k ... E_1 A es decir, la forma normal de Hermite es el producto de las matrices elementales por A (¡cuidado con el orden!):

In[]: = **H=el3[1, 2, -1, 3]. el3[1, 3, -2, 3]. el3[2, 3, 11/3, 3]. el2[3, 3, 3]. el3[3, 2, -2, 3]. el2[2, 1/3, 3]. el3[3, 1, -2, 3]. el1[1, 2, 3].a;**
MatrixForm[H]

Out[] = $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

APLICACIONES:

i) Sea A $\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y sea H la forma de Hermite por filas de A. Entonces existe una matriz regular Q $\in M_m(\mathbb{K})$ de forma que H = QA.

ii) En particular, si A es cuadrada y regular, H=I y Q=A^{-1}, por lo que el método anterior proporciona una forma de calcular la inversa de una matriz regular utilizando transformaciones elementales.